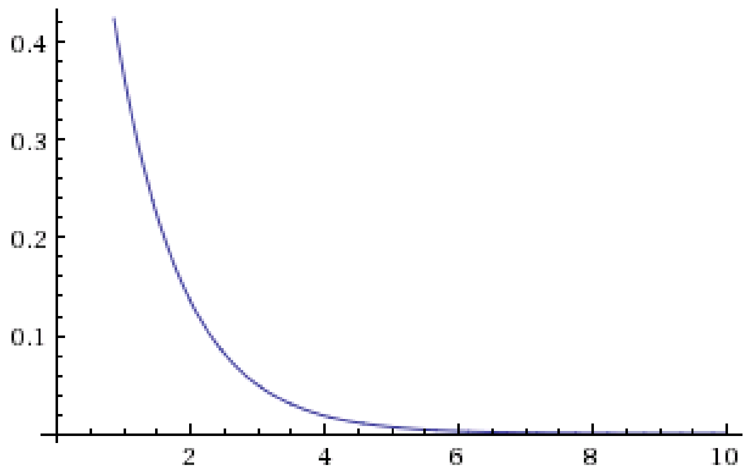
Bernardo Aceituno Cabezas

Carnet: 12-10764

PS2315 - Problema Semana 2

1. La función a aproximar se ve de la forma:



Por ello, sabemos que cuando aproximamos una función *h(t)* con un tren de pulsos de ancho Δ nos va a quedar una aproximación de la forma:

$$h(t) \approx \sum_{k=0}^{\frac{10}{\Delta}} h(\Delta k)\delta_{\Delta}(t - \Delta k)\Delta$$

Debido a que solo necesitamos pulsos desde t=0 hasta t=10 Ahora, para cada caso particular se ve como:

(a) Sea $\Delta = 1$, sustituimos en la relación anterior y nos queda:

$$h(t) \approx \sum_{k=0}^{10} h(k)\delta_{\Delta}(t - k)$$

(b) Sea Δ = 0.5 = $\frac{1}{2}$, tenemos que la aproximación por tren de pulsos se convierte en:

$$h(t) \approx \sum_{k=0}^{20} \frac{h(\frac{k}{2})\delta_{\Delta}(t-\frac{k}{2})}{2}$$

2. Sabemos que para un sistema LTI con entrada *x(t)*, salida *y(t)* y respuesta al impulso *h(t)* tenemos*:*

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

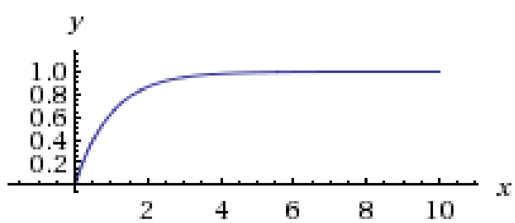
En nuestro caso como trabajamos con el escalón unitario tendremos:

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Donde como $h(\tau)$ solo es distinta a cero con $10 > \tau > 0$ y $u(t-\tau)$ con $\tau < t$, luego nos queda (para >10t>0):

$$s(t) = \int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau} + e^{-0} = 1 - e^{-t}, \quad 10 > t > 0$$

Que gráficamente es:



Para t<0 las funciones se definen como cero, luego

$$s(t) = 0, \quad 0 > t$$

Y en t>10, la función exponencial se define como cero, mientras que el escalón sigue tomando el valor de 1, por ello:

$$s(t) = \int_{0}^{10} e^{-\tau}d\tau = -e^{-10} + e^{-0} = 1 - e^{-10}, \quad 10 < t$$

3. Tenemos que realizar la convolución entre u(t) y las dos respuestas al aproximadas, para cada aproximación (es decir, para Δ cualquiera) la convolución será:

$$y(t) = h_{\Delta}(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\Delta}(t)u(t-\tau)d\tau$$

Que si simplificamos un poco nos queda para 0<t<10:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{k=0}^{10/\Delta} h(\Delta k)\delta_{\Delta}(t - \Delta k)\Delta \, d\tau$$

Veamos por caso, t<0 como h(*Δ*k) es cero para k<0 y $\delta_{\Delta}(t - k)$ solo es distinto de cero entre *Δ*k<t<*Δ*k+Δ:

$$y(t) = 0, t < 0$$

Si tenemos 10>t>0, vemos que el valor de la suma va a depender del valor de k, luego,

<u>k = 1</u>

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{k=0}^{10} h(k)\delta_{\Delta}(t - k)\, d\tau$$

Que evaluado es:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{10} h(k)u_1(t - k)$$

Dónde:

$$u1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 1 > t \geq 0 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

<u>K = 0.5</u>

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{k=0}^{20} h(0.5k)\delta_{\Delta}(t - 0.5k)0.5\, d\tau$$

Si integramos nos queda:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{20} h(0.5k)u_1(t - 0.5k)\, 0.5$$

Para ambos casos en t>10 la función se vuelve cero, luego la convolución se vuelve a nular!

Notemos que la aproximación hace mejor entre menor sea el tamaño del rectángulo, por ello la solución mas precisa se da en Δ = 0.5.
Ahora, si Δ→ 0, tendremos:

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{10/\Delta} h(\Delta k)\delta_{\Delta}(t - \Delta k)\, \Delta = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t)$$

Que sabemos ahora es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \mathrm{s(t)}$$

(Respuesta del sistema al Escalón)